FACULDADE DE ECONOMIA DA UNIVERSIDADE DE COIMBRA

PEDRO LOPES FERREIRA

AVALIAÇÃO MULTIATRIBUTO: MODELOS DE UTILIDADE E MÉTODOS

COIMBRA — 1996

Impresso na Secção de Textos da FEUC

ÍNDICE

1

Introdução

Este é um curso acerca da tomada da decisão, como as pessoas tomam decisões e o que fazem (ou podem fazer) para melhorar as decisões que tomam.

Esta frase implica várias questões:

- *Poderá a tomada de decisão ser estudada?*

  De facto, há certas civilizações que afirmam que o homem não pode tomar decisões pois tudo é ordenado por um Deus. Outras, por outro lado defendem que nós ainda temos a liberdade de escolhermos entre as várias avenidas que nos são postas à nossa frente.

- *Será que uma tomada de decisão pode ser melhorada?*

  O que é que se entende por uma "boa" ou "má" decisão? Uma decisão boa será aquela que resulta numa boa consequência? Ou será aquela cujo processo de decisão foi satisfatório? (veja-se, por exemplo, o incidente da Baía dos Porcos e a decisão dos governos francês e inglês de apoiarem a produção do Concorde).

Partindo da hipótese de que a qualidade da tomada de decisão pode ser melhorada, a questão seguinte é: como é que isso pode ser feito? A teoria da decisão tem as suas raizes na economia, na psicologia e na lógica matemática. Debruçar-nos-emos sobre estes tópicos no decorrer deste curso. Irei também falar da arte de tomar decisões, também chamada análise da decisão.

A matéria usada neste curso foi baseada essencialmente em dois livros (o primeiro é um clássico em teoria da decisão e o segundo coloca a teoria no seu contexto psicológico):

Keeney & Raiffa (1976)

von Winterfeldt & Edwards (1986)

Outros dois livros também escolhidos tratam essencialmente dos aspectos matemáticos da teoria da medição e da axiomática necessária para suportar a teoria da decisão. São eles:

Krantz, Luce, Suppes & Tversky (1971)

Fishburn (1970)

French (1988)

Para os aspectos da contribuição da psicologia para a teoria e arte da decisão será usado o livro

Watson & Buede (1989)

Alguns artigos serão também apresentados para leitura.

2

A tomada de decisão racional

Normalmente consideramos que uma decisão é boa se for racional. No entanto, este conceito de racionalidade tem sido encarado sob várias perspectivas, sendo uma delas a seguida pela investigação operacional e pela análise de sistemas. Outra, mais subjectiva, está mais relacionada com as percepções do agente da decisão e será objecto de estudo destas notas.

Há decisões que podem ter boas ou más consequências independentemente dos processos seguidos, podendo estas situações ser julgadas por vários factores. De entre eles há a salientar a complexidade, a incerteza, os objectivos em conflito e a existência de múltiplos agentes de decisão.

Com a rede de interacções do mundo actual, a maior parte das decisões tornaram-se extremamente complexas com vários factores. As consequências negativas de algumas decisões são devidas à impossibilidade do agente de decisão em incorporar todos estes factores importantes[1].

[1] Investigadores na área da psicometria asseguram-nos de que só podemos processar em paralelo 7 ± 2 bits de informação; caso contrário, ficaríamos sobrecarregados.

A incerteza tem sido vista como um dos problemas mais importantes da tomada da decisão. *Se soubesse o que é que o meu competidor ia fazer, ter-me-ia sido bem mais claro determinar qual a decisão a tomar.*

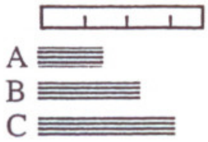
Um outro problema importante na tomada da decisão é a existência de objectivos em conflito (*trade-off judgments*). O director de uma empresa, por exemplo, ao decidir o local de implantação de uma nova fábrica num outro país pode estar a contar com a vantagem da existência de mão de obra mais barata. No entanto, poderá também eventualmente ter de enfrentar problemas de má qualidade de bens ou mesmo de instabilidade da economia nesse país.

Ainda mais difícil se torna a decisão quando o número de actores intervenientes é múltiplo, cada um deles com uma perspectiva diferente relativamente à importância dos objectivos.

Necessitamos então de um enquadramento racional que nos ajude a pensar através das decisões. Poderemos dizer que somos racionais sempre que, tendo adoptado regras que as nossas afirmações e acções respeitam, actuamos de maneira consistente.

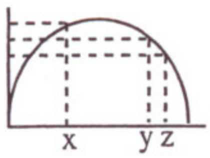
O comportamento do agente de decisão depende do conjunto de regras às quais a racionalidade está associada. Por exemplo, será racional dizer-se que, sendo eu indiferente entre A e B e também entre B e C, eu prefira A a C? Se exigirmos que os juízos de indiferença sejam transitivos, isto demonstra um comportamento irracional.

No entanto, e apesar de nos terem sempre apresentado a transitividade como uma propriedade normal, nem sempre a respeitamos no dia-a-dia. A intransitividade pode, de facto, ocorrer nas seguintes circunstâncias:



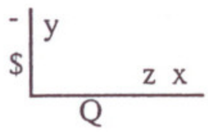
impossibilidade de se distinguirem objectos (diferenças muito pequenas). Esta situação ocorre em medições físicas e psicológicas.

$A \sim B$, $B \sim C$ mas $A \prec C$



comparação através de lados diferentes de uma função de preferência não monotónica. Ocorre em medições psicológicas.

$x \sim y$, $y \sim z$ mas $x \succ z$



comparação de preferências entre dimensões.

Ocorre em medições psicológicas

$x \sim y$, $y \sim z$ mas $x \succ z$

Por conseguinte, para se ser racional na tomada da decisão, precisamos de construir um conjunto de regras que pretendemos usar na determinação do que fazer em situações complexas de decisão.

No entanto, ser-se racional é uma coisa e ser-se científico é outra. Para se utilizar um método científico, escolhemos uma hipótese, recolhemos dados, testamos a falsidade da hipótese e, em consequência do teste, usamos ou não a hipótese para explicar o fenómeno em causa. Estes procedimentos são às vezes também chamados racionalismo científico (estes procedimentos podem de facto ser encarados como regras).

A aplicação deste racionalismo científico às organizações ou à actividade humana é por vezes denominado investigação operacional (IO) ou análise de sistemas. Apesar de muito divulgada, esta não é a única abordagem possível. Tal como Linstone (1984), considero que existem três perspectivas para se analisar uma decisão: a abordagem tecnológica (ou IO), a abordagem organizacional e a abordagem pessoal.

A abordagem tecnológica tem sido a mais usada apesar de existirem algumas críticas à sua utilização, nomeadamente na área da gestão. Três destas críticas são:

- não envolvimento do agente da decisão na natureza experimental e iterativa da análise;
- insuficiente atenção ao contexto organizacional e pessoal da tomada de decisão;
- menos importância dedicada aos meios quando comparada com a dedicada aos fins.

Como é evidente, a utilização de uma determinada abordagem deverá depender não só dos conhecimentos do investigador ou analista, mas também, e principalmente, da natureza do problema em causa. Sente-se então, por vezes, a necessidade de uma abordagem mais aberta e de um conjunto de regras em que nos apoiamos para a tomada de decisão. Estas regras devem fornecer os cálculos necessários para conduzir o agente da decisão em problemas complexos. Devem também ter em conta os valores dos agentes da decisão, de modo a permitir a articulação das suas preferências e percepções em relação aos objectos e variáveis do ambiente da decisão. Finalmente, devem definir o que se entende por racional em face das percepções da incerteza.

A teoria da decisão apresenta-se como respeitando todos estes requisitos. Garante-nos que a escolha que fazemos é consistente com aquilo em que acreditamos, com os nossos sistemas de valores e com os valores da organização em que trabalhamos.

3

Teoria da decisão

A teoria da decisão apresenta, com efeito, um enquadramento quantitativo necessário a encorajar a consistência, essência da racionalidade. Começaremos por falar da teoria (das funções) de valor essencialmente orientada para problemas de decisão com objectivos em conflito. Seguidamente falaremos de incerteza, de como o cálculo das probabilidades pode ser usado para a descrever e de como a teoria da utilidade pode ser usada em situações de tomada de decisão em face da incerteza. Finalmente, a fusão dos estudos de objectivos em conflito e em incerteza permite-nos discutir as várias perspectivas perante o risco.

3.1 Objectivos em conflito

Estamos constantemente a tomar decisões. Exemplo disso são as seguintes questões:

- *que roupas devo vestir de manhã?*
- *o que é vou comer ao almoço?*

- *e à noite, irei ler um livro ou ver televisão?*

Na maioria dos problemas de decisão que enfrentamos, a grande dificuldade reside na existência de alguns objectivos em conflito.

- *Escolherei o emprego com o maior salário, com as melhores perspectivas de progressão na carreira, ou aquele com melhores condições de trabalho.*
- *Escolherei um computador que seja compatível com os sistema actuais, ou aquele que apresenta características novas e úteis.*

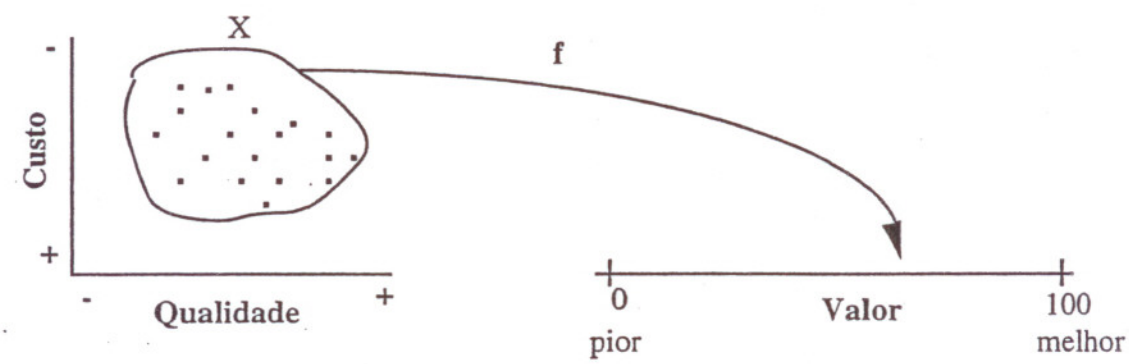
Toda a escolha seria muito mais simples se só houvesse um critério a considerar. Se pudéssemos comprar a mesma coisa em todas as lojas, o único critério de decisão seria o do custo. Mas mesmo assim, poder-se-iam levantar outros critérios eventualmente importante. A distância à loja ou a simpatia do pessoal que atende poderiam justificar gastar-se mais algum dinheiro na compra.

3.1.1 Atributos e avaliação

Se conseguíssemos encontrar uma única medida numérica que tivesse em conta todos estes factores, então a nossa escolha seria simples; a dificuldade está em construirmos tal medida. Esta ideia de se construir uma medida numérica para representar o valor de cada uma das alternativas foi primeiramente estudada por Daniel Bernoulli (1738). Como iremos ver a seguir, Bernoulli defendeu que o dinheiro não era uma medida adequada de valor. Em alternativa, ele sugeriu que o valor ou utilidade do dinheiro para cada indivíduo fosse uma função não linear e com um declive sempre cada vez menor.

Aqui é importante definirmos dois tipos de preferências. A primeira é a preferência de valor entre objectivos ou atributos em conflito e onde não existe incerteza. A segunda consiste na preferência de risco, medida pelas funções de utilidade.

Cada vez que tomamos uma decisão, estamos concomitantemente a resolver um problema de avaliação; cada avaliação tem subjacente um contexto de decisão. Vejamos o exemplo de comprar um aparelho de TV e consideremos que estamos apenas perante dois objectivos em conflito: melhor qualidade e mais baixo custo. Em cada escala, a maior preferência é representada por valores maiores.

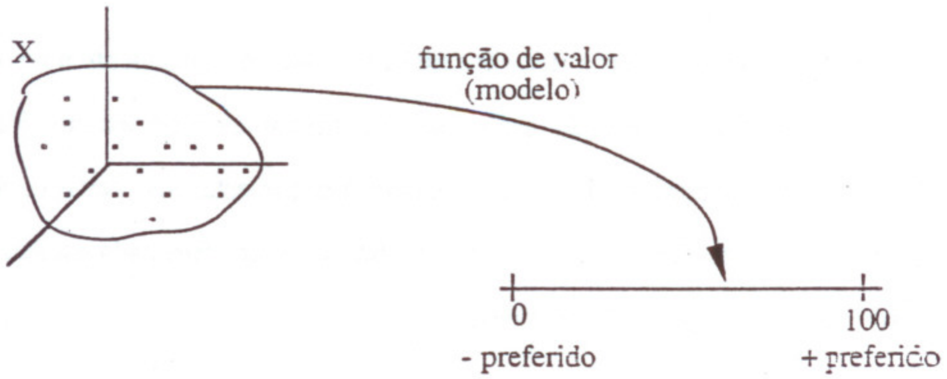


Cada dimensão descreve um aspecto diferente do problema. A escala representa as opiniões e juízos; a ordem na escala deve representar as preferências.

Vários passos devem ser seguidos quando se pretende fazer uma avaliação. São elas:

1. definir os limites do conjunto das alternativas;
2. definir os vários atributos $X_1, X_2, \ldots, X_n$;
3. obter medidas para cada X_i;
4. obter a função f;

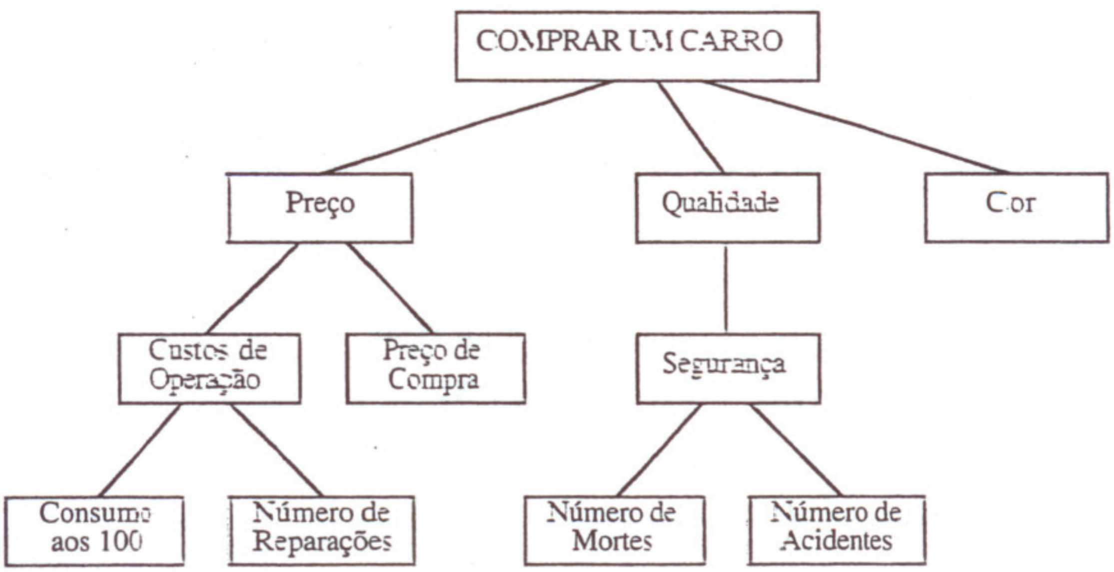
5. preocuparmo-nos com as incertezas.



Ao definirmos os atributos temos de nos certificar que satisfazem as seguintes características (Keeney & Raiffa 1976):

1. integridade - todos os atributos relevantes estão na estrutura
2. operacionalidade - todos os atributos de mais baixo nível têm significado
3. decomponibilidade - pode-se dividir em partes mais pequenas
4. não redundância
5. pequeno tamanho

Para exemplificar estas propriedades vejamos a seguinte árvore de atributos para o objectivo "comprar um carro".



3.1.2 Bases matemáticas da medição

Este tipo de problema de avaliação leva-nos às bases matemáticas da medição. Krantz, Luce, Suppes e Tversky (1971) definiram medição como sendo a atribuição de números (ou outras entidades matemáticas, tais como vectores) a objectos de tal modo que as propriedades dos objectos sejam correctamente representadas como propriedades numéricas. Outros esforços têm também sido feitos para definir medição. Blalock (1968), por exemplo, apresentou a medição como uma ponte entre a teoria e a investigação, entre os conceitos abstractos e os indicadores empíricos.

De uma maneira formal, se tivermos um conjunto de objectos empíricos e um conjunto de relações R_i $(i \in I)$ definido em A, podemos construir um sistema relacional $\mathcal{A} = \langle A ; R_i\ (i \in I)\rangle$ (Pfanzagl, 1973). Se A for o conjunto dos reais $(A \equiv \Re)$, o sistema relacional é denominado numérico.

Sendo dado dois sistemas relacionais, um empírico, $\langle A;R_i\ (i \in I)\rangle$ e outro numérico, $\langle \Re;S_j\ (j \in I)\rangle$, consideremos ψ como sendo uma função entre estes dois sistemas. ψ é chamado um homomorfismo sse envia A em $\Re$ e preserva as propriedades das relações, isto é,

$$\forall\ i \in I \text{ e } (a_1,\ldots,a_k) \in A^k,\ R_i(a_1,\ldots,a_k) = S_j(\psi(a_1),\ldots,\psi(a_k))$$

onde $(a_1,\ldots,a_k)$ é um k-tuplo e $R_i(a_1,\ldots,a_k)$ é uma relação k_i-ária em A.

A abordagem matemática da medição (Kyburg, 1984) fornece-nos os teoremas que garantem a medição. De entre estes há a salientar a importância do teorema de representação (que nos permite usar os números ou vectores para representar as propriedades dos objecto) e o teorema da unicidade (que nos diz que quaisquer duas funções de objectos a números estão relacionadas). A maneira como estas duas funções estão relacionadas fornece-nos o tipo de escala que podemos usar e determina o tipo de manipulações aritméticas que nos estão acessíveis (significância de estatísticas).

E assim voltamos de novo à problemática da racionalidade

Porque grande parte deste curso é baseada em relações binárias de preferência, debrucemo-nos um pouco sobre relações binárias. Uma relação binária R, num conjunto X, é um conjunto de pares ordenados (x,y) tal que $x \in X$ e $y \in X$. Esta relação R pode ter algumas propriedades. Assim $\forall\, x,y,z \in X$

P_1	reflexiva	xRx
P_2	irreflexiva	não xRx
P_3	simétrica	xRy $\Rightarrow$ yRx
P_4	assimétrica	xRy $\Rightarrow$ não yRx
P_5	antissimétrica	(xRy e yRx) $\Rightarrow$ x=y
P_6	transitiva	(xRy e yRz) $\Rightarrow$ xRz
P_7	transitiva negativa	(não xRy e não yRz) $\Rightarrow$ não xRz
P_8	ligada	xRy ou yRx ou ambos - expressão de preferência
P_9	ligada fraca	$x \neq y \Rightarrow$ (xRy ou yRx)

3.1.3 Função de valor

Baseado na definição de estrutura relacional e nas propriedades das relações binárias atrás enunciadas, podemos extrair um certo número de conclusões.

Definição 1: $\langle A\, ; \succsim \rangle$ é uma ordem fraca sse

ligada $\quad a \succsim b$ ou $b \succsim a$

transitiva $\quad (a \succsim b$ e $b \succsim c) \Rightarrow a \succsim c$

Definição 2: $\succsim$ é uma relação binária em A $\Rightarrow$ $a \sim b \;\; \Leftrightarrow \;\; a \succsim b$ e $b \succsim a$

$a \succ b \;\; \Leftrightarrow \;\; a \succsim b$ e não $b \succsim a$

Para introduzir a ideia de uma função de valor caracterizemos o tipo de problema que iremos estudar. Há um conjunto bem definido de opções e n atributos usados para as discriminar. Partimos do pressuposto de que é inequivocamente possível associar um valor numérico a cada atributo de cada opção. Assim a opção x poderá ser escrita como $x=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$. A raiz do problema consiste então em decidir qual dos vectores é mais atractivo ao agente de decisão.

Teorema 1: Se $\langle A ; \succsim \rangle$ é uma ordem fraca

(teorema de representação) $\Rightarrow \exists \; v: A \rightarrow \Re : a \succsim b \Leftrightarrow v(a) \geq v(b) \quad , \quad \forall \, a,b \in A$

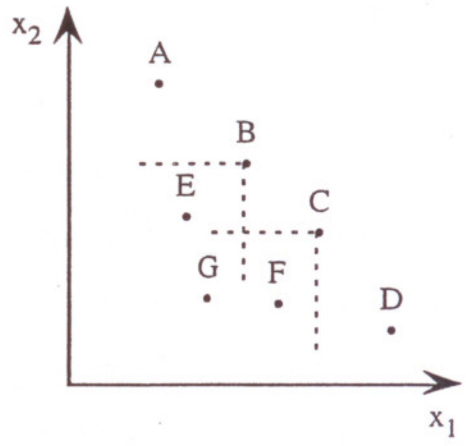
(teorema de unicidade) $\Rightarrow v'(a) = f\,[v(a)]$

Como a função v existe, o problema de decisão reduz-se à escolha do vector x para o qual v(x) é maior. Por vezes, a decisão da escolha do vector é grandemente simplificada. É o caso de uma opção dominar todas as outras.

Definição 3: Uma opção A diz-se dominar uma outra opção B se $\forall \, i \in I$, $x_i^A \geq x_i^B$ e para pelo menos um i, $x_i^A > x_i^B$.

Se uma opção domina todas as outras é racional escolhê-la. Vejamos um exemplo com duas dimensões.

Temos sete opções para escolher, das quais três são dominadas pelas restantes (E, F e G).



Quando removermos do conjunto das opções, todas as dominadas por outras, o conjunto com que ficamos é chamado a fronteira eficiente ou o conjunto óptimo de Pareto. É sobre este conjunto de opções que deve assentar o nosso modelo de decisão.

Como já vimos, a garantia de existência de uma função de valor é conseguida pelo teorema de representação. Exemplo disso é o teorema para estruturas conjuntas, finitas e aditivas (Luce & Tukey, 1964) que se segue.

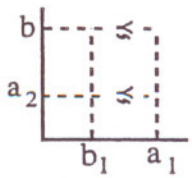
Teorema 2: Se tivermos a estrutura $\langle A_1 \times A_2; \succsim \rangle$ com A_1 e A_2 finitos e as propriedades

P_1 $\succsim$ é uma ordem fraca

P_2 A_1 é preferencialmente independente de A_2

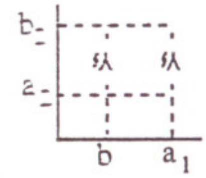
$\forall\, a_1, b_1 \in A_1$ se $\exists\ a_2 \in A_2 : (a_1, a_2) \succsim (b_1, a_2)$

então $\forall\, b \in A_2\ (a_1, b) \succsim (b_1, b)$



as preferências em A_1 são indep. de valores fixados em A_2

P_3 A_2 é preferencialmente independente de A_1



$\forall\, a_2, b_2 \in A_2$ se $\exists\, a_1 \in A_1 : (a_1, a_2) \succsim (a_1, b_2)$

então $\forall\, b \in A_1 \quad (b, a_2) \succsim (b, b_2)$

as preferências em A_2 são indep de valores fixados em A_1

P_4 Solvabilidade

Se tivermos (a,b) e (c,x), é sempre possível encontrar-se x de tal modo que

$(a,b) \sim (c,x)$

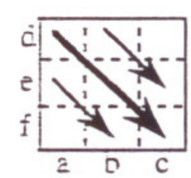
P_5 Axioma arquimediano (fornece-nos a continuidade)

Nada está infinitamente longe que se não possa atingir num espaço finito

P_6 Essencial

Necessitamos de duas dimensões; cada componente é essencial.

P_7 Condição estrutural - cancelamento duplo



Se $(b,f) \succsim (a,e)$ e $(c,e) \succsim (b,d)$ então $(c,f) \succsim (a,d)$

Então,

$$\exists\, v_1, v_2 : (x_1, x_2) \succsim (x'_1, x'_2) \Leftrightarrow v_1(x_1) + v_2(x_2) \geq v_1(x'_1) + v_2(x'_2)$$

ou (à la Fishburn),

$$\exists\, v : (A_1 \times A_2) \rightarrow \Re \text{ tal que } (x_1, x_2) \succsim (x'_1, x'_2) \Leftrightarrow v(x_1, x_2) \geq v(x'_1, x'_2)$$

P1, P2, P3 e P7 são condições necessárias para a aditividade, isto é, se tivermos aditividade, devemos ter estas condições. P4 e P6 são condições suficientes.

Vamos continuar a falar em independência. Já definimos o que se entende por dois atributos preferencialmente independentes. Vejamos agora a definição de atributos mútua preferencialmente independentes.

Definição 4: Se a nossa estrutura de preferências é tal que quaisquer dois atributos sejam preferencialmente independentes de todos os outros, então dizemos que os atributos são mútua preferencialmente independentes.

$$\begin{aligned} \{X_1, X_2, \ldots, X_n\} \text{ MPI} \quad \text{se} \quad & \{X_1, X_2\} \text{ PI } \{X_{\overline{12}}\} \\ & \{X_2, X_3\} \text{ PI } \{X_{\overline{23}}\} \\ & \ldots \\ & \{X_{n-1}, X_n\} \text{ PI } \{X_{\overline{n-1\, n}}\} \end{aligned}$$

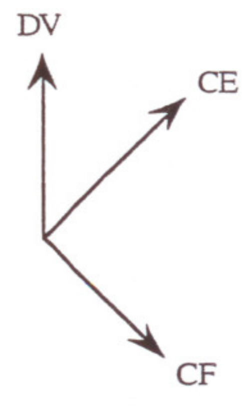
Em vez de fazermos 2^n-2 testes, apenas necessitamos de usar (n-1) subconjuntos (Keeney & Raiffa, 1986).

Exemplo de teste de MPI para "perfis de saúde":

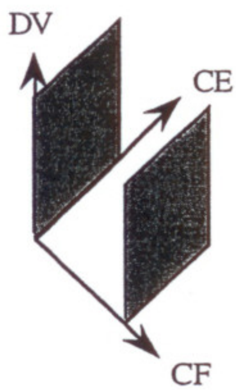
CE - condição emocional

DV - duração de vida

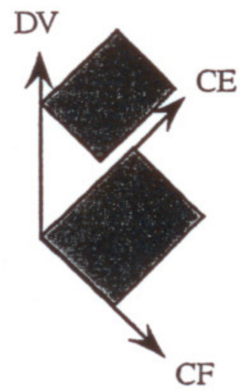
CF - condição física



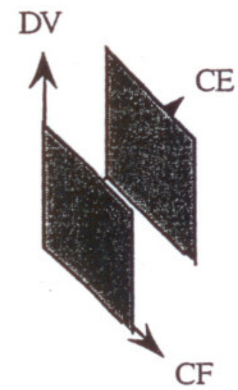
{CE,DV} PI {CF}



{CE,CF} PI {DV}



{CF,DV} PI {CE}



Se conseguirmos provar que as nossas preferências respeitam a mútua independência preferencial, então deve existir uma função de valor com a forma aditiva

$$v(x) = \sum_{i=1}^{n} k_i \, v_i(x_i)$$

Mais ainda, a função v(x) é única a menos de uma transformação linear positiva. Se existir outra função v'(x) com as mesmas propriedades, devem também existir dois números a e b, com b>0, tal que v'(x)=a+bv(x). Como exemplo de funções deste tipo há as escalas Fahrenheit e Celcius de temperatura.

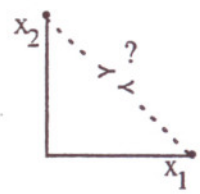
3.1.4 Método de Keeney

1. Obter os atributos, usando normalmente a hierarquia existente nos objectos. Tentar obter medidas contínuas e MPI tanto quanto possível.

	Atributo	Medida	x^o	x^*
1	...	...	...	...
2	...	...	...	...
...				
n	...	...	...	...

2. Partir da hipótese de que vamos construir um modelo aditivo.

3. Derivar as constantes de escala (obter indiferenças)



- obter o ordem global de importância, observando as preferências para os pontos de canto;
- obter indiferenças em relação ao atributo mais importante.

...

4. Obter funções componentes, $v_i(x_i)$

- técnica da divisão pelo ponto médio (se possível)
- estimação directa (com verificação de indiferenças)

5. Resolver as equações geradas em ordem aos k_is.

Exemplo 1: Função multiatributo de valor.

Problema: Seleccionar um local para se construir um aeroporto.

1.

Atributo		*Medida*	x^o = *pior*	x^* = *melhor*
1. Perigo para a população	X_1	densidade da população num raio de 3 milhas	100.000	1.000
2. Dificuldade da construção	X_2	preço estimado da nivelação do local	2.5 milhões	0.5 milhões
3. Segurança dos aviões	X_3	velocidade média do vento	25 kph	2 kph

2. *Teste de MPI*

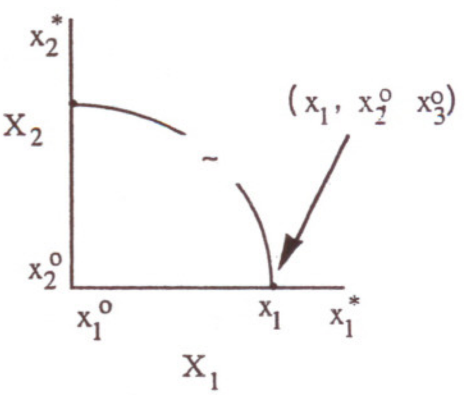
- independência preferencial individual

empiricamente, seremos capaz de imaginar uma situação onde $x_i^o \succ x_i^*$, $\forall$ i=1,2,3 ?

- pares preferencialmente independentes

$\{X_1,X_2\}$ PI $\{X_3\}$

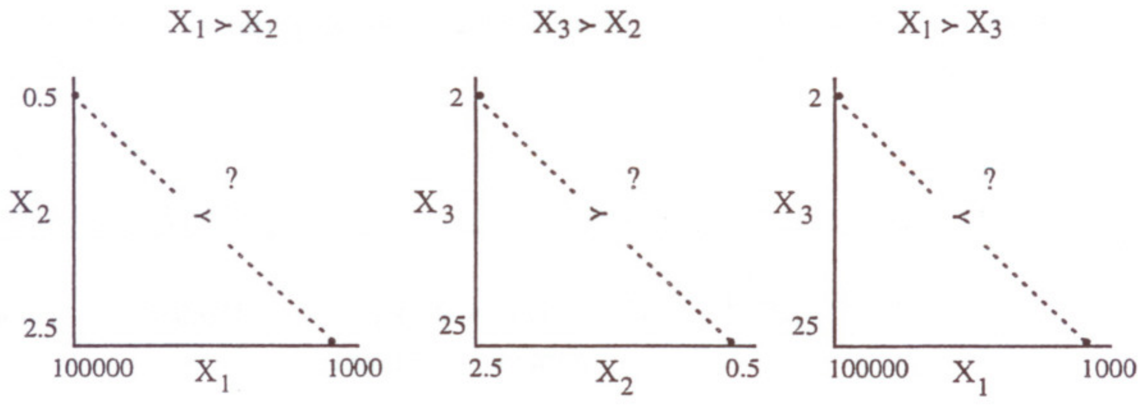
Será que a indiferença se mantém quando x_3^o é alterado para x_3^* ?



Verificar para os outros pares

$\{X_1,X_3\}$ e $\{X_2,X_3\}$

3. *Ordem de importância relativa dos atributos*



Quais são os pontos de canto preferidos?

Suponhamos que $X_1 \succ X_3 \succ X_2$

4. *Escala para atributos*

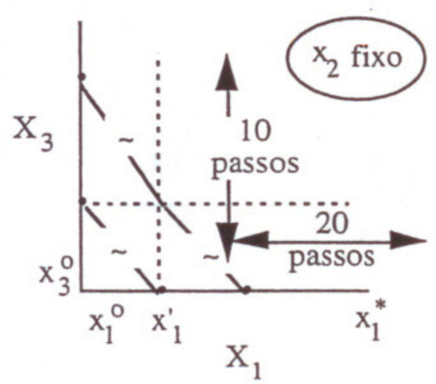
Há três métodos: 1. passos fixados - método longo

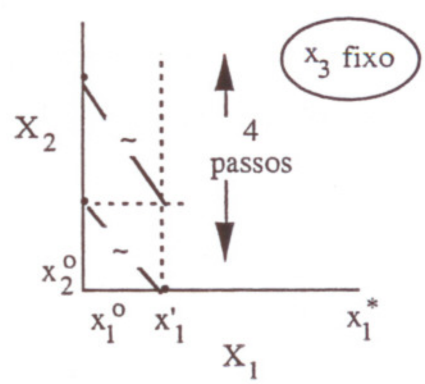
2. divisão pelo ponto médio - método curto

3. desenhar uma curva - método rápido

4.1 *Método de Passos Fixados* (quase nunca usado na prática)

- usar o atributo mais importante, X_1, como métrica
- x_i^o é a origem. $v_i(x_i^o)=0$
- escolher x_1' como passo unitário





• definir a escala

$$v'_1(x_1^*) = 20$$

$$v'_2(x_2^*) = 4$$

$$v'_3(x_3^*) = 10$$

nota: usamos v' porque as funções que obtemos são ligeiramente diferentes das iniciais

$$v'(x_1, x_2, x_3) = v'_1(x_1) + v'_2(x_2) + v'_3(x_3)$$

Para que todas as amplitudes estejam entre 0 e 1, fazemos $v_i(x_i) = \dfrac{v'_i(x_i)}{v'_i(x_i^*)}$

Então,

$$v'(x_1, x_2, x_3) = 20\, v_1(x_1) + 4\, v_2(x_2) + 10\, v_3(x_3)$$

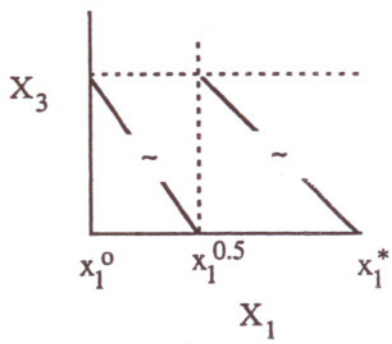
Normalizando,

$$v(x_1, x_2, x_3) = \frac{20}{34} v_1(x_1) + \frac{4}{34} v_2(x_2) + \frac{10}{34} v_3(x_3)$$

função MAV = $\sum$ constante de escala ($\sum$=1) * função de valor (0-1)

4.2 *Divisão pelo ponto médio* (método alternativo)

Encontramos $x_1^{0.5}$ de tal modo que as indiferenças se mantenham; isto é, de tal modo que consigamos chegar a x_i^* em dois passos.

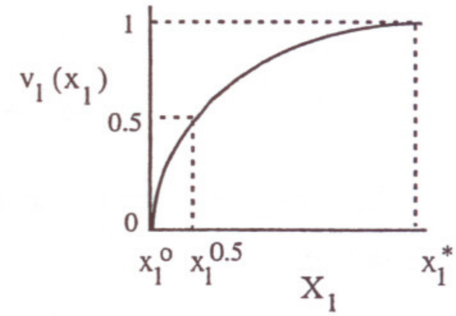


Neste caso, definindo $v_1(x_i^o) = 0$

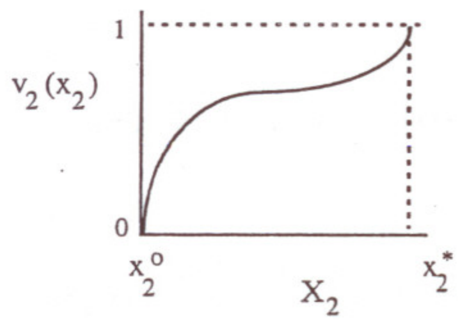
$$v_1(x_i^{0.5}) = 0.5$$

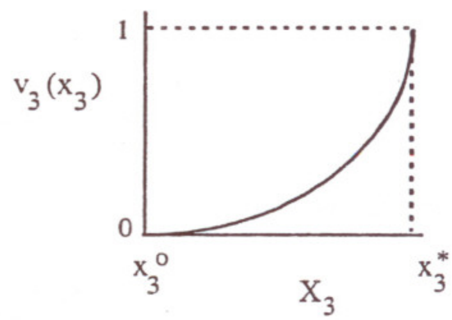
$$v_1(x_i^*) = 1$$

obtemos



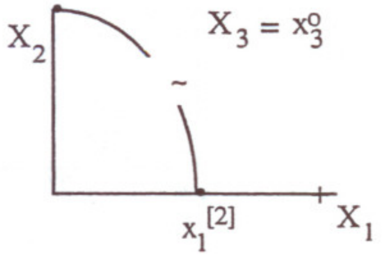
Fazendo isto para todos os atributos, obteríamos, por exemplo,





5 *Obtenção das constantes de escala*

Suponhamos que $X_1 \succ X_3 \succ X_2$. Para obtermos os valores das constantes de escala k_is usamos, de novo, as indiferenças.



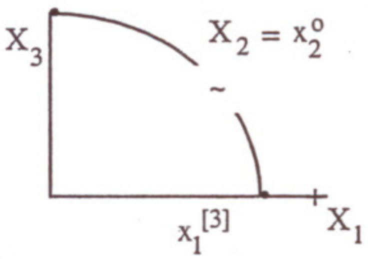
$$(x_1^o, x_2^*, x_3^o) \sim (x_1^{[2]}, x_2^o, x_3^o)$$

$$v(x_1^o, x_2^*, x_3^o) = v(x_1^{[2]}, x_2^o, x_3^o)$$

$$k_1\, v_1(x_1^o) + k_2\, v_2(x_2^*) + k_3\, v_3(x_3^o) \;=\; k_1\, v_1(x_1^{[2]}) + k_2\, v_2(x_2^o) + k_3\, v_3(x_3^o)$$

$$0 + k_2 + 0 = k_1 v_1(x_1{}^{[2]}) + 0 + 0$$

$$\boxed{k_2 = k_1 v_1(x_1{}^{[2]})}$$



$$(x_1{}^o, x_2{}^o, x_3{}^*) \sim (x_1{}^{[3]}, x_2{}^o, x_3{}^o)$$

$$\boxed{k_3 = k_1 v_1(x_1{}^{[3]})}$$

Porque os atributos são independentes,

$$\boxed{k_1 + k_2 + k_3 = 1}$$

Temos três equações a três incógnitas. No nosso caso,

$v_1(x_1{}^{[2]})=0.2$ e $v_1(x_1{}^{[3]})=0.5$

Então,

$$\begin{cases} k_2 = k_1\,(.2) \\ k_3 = k_1\,(.5) \\ k_1 + k_2 + k_3 = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} k_1 \quad .58 \\ k_2 = .12 \\ k_3 = .30 \end{cases}$$

O modelo final será então,

$$v(x_1, x_2, x_3) = .58\, v_1(x_1) + .12\, v_2(x_2) + .30\, v_3(x_3)$$

Nota: Comparar com o modelo obtido pelo método dos passos fixados

3.1.5 Método SMART

SMART (Simple multi-attribute rating technique) foi um método proposto por Edwards (1971) como uma alternativa à abordagem de Keeney e Raiffa. Difere substancialmente desta (ou da de Fishburn) no que respeita o emprego de matemática mais sofisticada.

São os seguintes os 10 passos do processo SMART, tirados de Gardiner & Edwards (1975):

1. Identificar a pessoa ou organização cujos valores irão ser moldados.

2. Identificar a decisão para a qual os valores são relevantes.

3. Identificar as entidades (isto é, as alternativas) a ser avaliadas.

4. Identificar as dimensões de valor (isto é, os atributos) relevantes.

   Recomenda-se que sejam menos de 15.

5. Classificar os atributos pela sua importância.

6. Pontuar os atributos mantendo os 'ratios' de importância.

   Na formulação inicial, ao menos importante é atribuído o valor 10 e aos outros são dados pontos à escala.

7. Normalizar os pesos k_i.

   Somar os pesos de importância, dividir cada um pela soma e multiplicar por 100.

8. Medir a localização de cada entidade em cada dimensão.

   Normalmente consiste na atribuição a cada alternativa de um valor entre 0 e 100 para cada dimensão.

9. Calcular o valor de cada entidade

$$v(x) = \sum_{i=1}^{n} k_i \, v_i(x_i)$$

10. Decidir após rever todo o processo.

3.2 Estudo da incerteza

Até agora partimos da hipótese de que conhecíamos com certeza os resultados da escolha de cada opção, de tal modo que o único problema era gerir os conflitos entre objectivos. No entanto, para a maioria das decisões, estes pressupostos são irrealistas.

Como é obvio, se pretendermos incorporar a incerteza nas nossas teorias de escolha, necessitamos de desenvolver cálculos que manipulem a incerteza. Isto é conseguido à custa da teoria das probabilidades.

Se os nossos juízos e opiniões são representados por números, estes números devem respeitar as regras das probabilidades. Se tivermos as probabilidades $P(A)$, $P(B)$, $P(A|B)$ e $P(B|A)$, estes valores deverão, por exemplo, respeitar a equação

$$P(B|A)\,P(A) = P(A|B)\,P(B) = P(AB)$$

Se esta relação não for satisfeita pelas probabilidades obtidas, então um ou mais dos números deverão ser alterados. Caso as pessoas sejam conscientemente enviesadas, é natural que esses enviesamentos sejam analisados. A isto chama-se calibragem e a literatura não está completamente de acordo em relação à possibilidade e necessidade de correcção destes enviesamentos.

3.2.1 Conceito de probabilidade

Existem essencialmente duas perspectivas de obtenção do conceito de probabilidade. São elas a objectiva e a subjectiva. A objectiva engloba duas abordagens: a clássica e a empírica.

A abordagem clássica, também chamada teórica ou *a priori*, parte do pressuposto de que conhecemos a situação amostral. Organizada a partir das ideias de Laplace tem sido, no entanto, considerada inapropriada ao mundo actual por não incorporar métodos satisfatórios de medição.

Utiliza os conceitos de casos igualmente prováveis (n) e de casos associados a um acontecimento de interesse para o investigador (m). A probabilidade de um acontecimento é obtida pelo quociente entre ambas:

$$\text{Probabilidade de um acontecimento} = \frac{\text{No. casos associados ao acontecimento}}{\text{No. de casos possíveis}} = \frac{m}{n}$$

De reparar que a probabilidade de um acontecimento nada tem a ver com o tipo de amostragem. A probabilidade de obtermos o número 2 quando lançamos um dados é sempre igual a $\frac{1}{6}$, independentemente do dado ser lançado ou não.

Há, no entanto, casos em que esta abordagem clássica não pode ser aplicada. Por exemplo, ao extrairmos amostras de uma população que não tenha sido estudada, podemos não ter conhecimento prévio dos valores de n ou de m. Nestes casos, necessitamos de um outro conceito de probabilidade. É a chamada probabilidade empírica ou de frequência relativa.

Esta abordagem de probabilidade, defendida por Venn, von Mises e Reichenbach, apresenta a probabilidade de um acontecimento como a frequência a longo prazo quando o acontecimento ocorre um número finito de vezes, isto é, vista como uma probabilidade objectiva do mundo real.

A probabilidade é então definida como o número de vezes que o acontecimento ocorre relativamente ao número de vezes que ele poderia ter ocorrido:

$$\text{Probabilidade de um acontecimento} = \frac{\text{No.vezes que um acontecimento ocorreu}}{\text{No.vezes que poderia ter ocorrido}} = \frac{m}{n}$$

Esta abordagem empírica baseia-se na experiência passada ou em resultados observados, sendo portanto sensível ao tamanho e conteúdo da amostra. Constituem aproximações naturais das probabilidades *verdadeiras* e são independentes do que se sabe ou se acredita.

Uma terceira teoria considera a probabilidade como subjectiva, incorporando a nossa percepção do acontecimento de interesse. Defendida, entre outros, por Ramsey, de Finetti e Savage, apresenta a probabilidade como um "grau de crença" *(degree of belief)* que um indivíduo tem relativamente a uma afirmação. Constitui uma propriedade da percepção subjectiva (ou estado de conhecimento) de um indivíduo em relação ao mundo real.

Finalmente, em alternativa a estas visões, e negando que as afirmações de probabilidade sejam afirmações empíricas, há as teorias lógicas defendidas por Keynes, Carnap e Kyburg. Estas teorias consideram a probabilidade como uma relação lógica entre a afirmação e o corpo de conhecimento, entre uma afirmação e outra afirmação (ou um conjunto de afirmações) representando a evidência. A característica essencial desta perspectiva é a seguinte: sendo dada uma afirmação, e sendo dado um conjunto de afirmações que constituem evidência ou corpo de conhecimento, há um e um só grau de probabilidade que a afirmação deve ter, relativa a uma dada evidência.

A interpretação de probabilidade que deverá ser adoptada para a aplicação da teoria de decisão tem de ser a subjectiva. Só assim é possível encontrarem-se justificações de natureza intelectual para os processos de análise da decisão.

Dois destes processos irão ser estudados a seguir: a matriz de decisão e a árvore de decisão. São essencialmente processos de organizar a informação de que dispomos.

3.2.2 Matriz de decisão

A matriz de decisão permite-nos dispor a informação de uma maneira muito concisa e económica, sem redundâncias desnecessárias.

Exemplo 2: Suponhamos que há três alternativas possíveis e que, independentemente disto, há três acontecimentos (estados da natureza) com as respectivas probabilidades de ocorrência.

	Acontecimentos		
	1	2	3
Alternativas	.2	.6	.2
1	6	4	2
2	5	5	3
3	1	2	6

Os valores esperados de cada uma das alternativas são dados por

$$VE_1 = (.2)\,(6) + (.6)\,(4) + (.2)\,(2) = 4.0$$

$$VE_2 = (.2)\,(5) + (.6)\,(5) + (.2)\,(3) = 4.6$$

$$VE_2 = (.2)\,(1) + (.6)\,(2) + (.2)\,(6) = 2.6$$

Assim, a opção 2 deverá ser a escolhida pois corresponde à de maior valor esperado.

Exemplo 3: Sendo dada a seguinte matriz de decisão, qual o intervalo de probabilidade do acontecimento 1 para que a alternativa 1 seja a melhor?

	Acontecimentos	
	1	**2**
Alternativas	p	1-p
1	1	6
2	4	2
3	5	3

Como A_2 é dominada por A_3, não incluiremos A_2 na nossa análise.

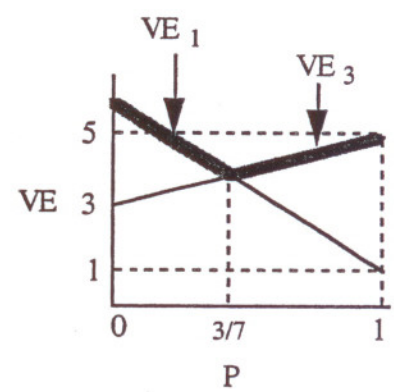
Calculemos os valores esperados das restantes opções.

$$VE_1 = 1p + 6(1\text{-}p) = 6\text{-}5p$$

$$VE_3 = 5p + 3(1\text{-}p) = 2p+3$$

Na intercepção,

$$VE_1 = VE_3 \quad \Rightarrow \quad 6\text{-}5p = 2p+3 \quad \Rightarrow \quad p = \frac{3}{7}$$



A_1 é a melhor no intervalo $0 \leq p < \frac{3}{7}$

A_3 é a melhor no intervalo $\frac{3}{7} < p \leq 1$

Indiferente entre A_1 e A_3, quando $p = \frac{3}{7}$

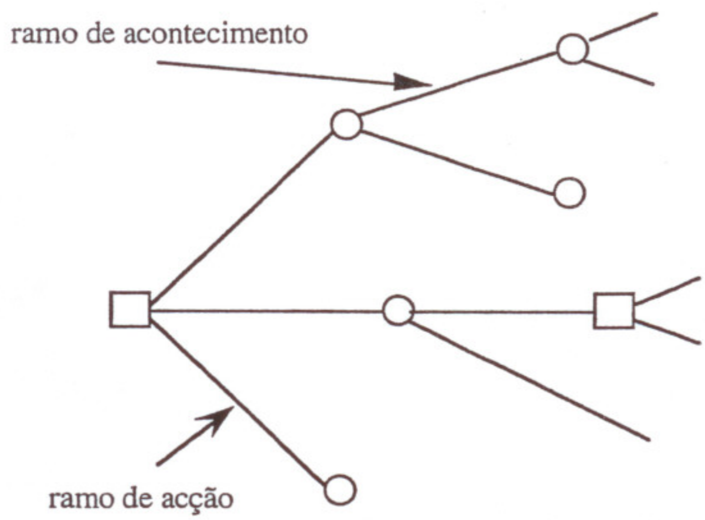
Nota: Comparar a linha quebrada obtida com a fronteira de Pareto atrás mencionada.

3.2.3 Árvore de decisão

A árvore da decisão dá-nos mais flexibilidade e poder. Cada alternativa pode ter diferentes acontecimentos associados.

Numa árvore existem ramos de acontecimentos, aqueles que vêm de nodos circulares, devendo os acontecimentos associados a estes ramos ser mutuamente exclusivos (a probabilidade tem de somar 1).

Podem também existir ramos de acção que vêm de nodos quadrados (uma das alternativas que o agente da decisão tem) e não têm quaisquer probabilidades associadas.



Exemplo 4: O Ricardo está perante três alternativas, A, B e C.

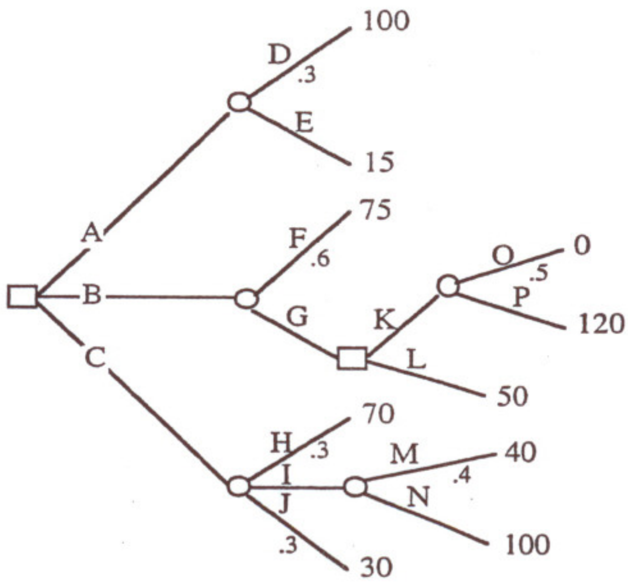
Se escolher A, podem ocorrer os acontecimentos D ou E, com probabilidades de .3 e .7 respectivamente e lucros de 100 e 15 respectivamente.

Se o Ricardo escolhe B, podem ocorrer os acontecimentos F ou G, com probabilidades de .6 e .4 respectivamente. Se F ocorrer, o lucro é de 75. Se G ocorrer, o Ricardo deve escolher entre K e L. Se escolher K, podem ocorrer os acontecimentos O ou P, com probabilidades de .5 e .5 respectivamente e lucros de 0 e 120 respectivamente. Se o Ricardo escolher L, o lucro é de 50.

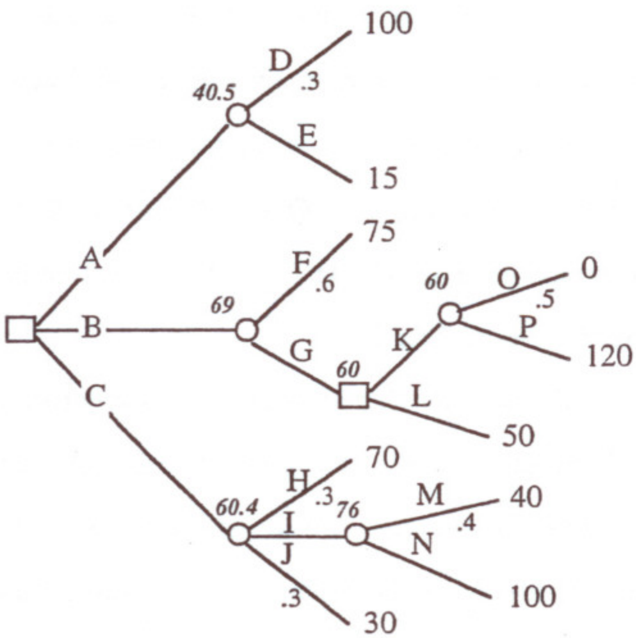
Se o Ricardo escolher C, podem ocorrer os acontecimentos H, I ou J, com probabilidades de .3, .4 e .3 respectivamente. Os lucros para H e J são 70 e 30 respectivamente. Se o acontecimento I ocorrer, então os acontecimentos M ou N podem ocorrer, com probabilidades de .4 e .6 respectivamente e lucros de 40 e 100 respectivamente.

Qual deverá ser o curso de acção óptimo para o Ricardo. Calcule o correspondente valor esperado.

A árvore de decisão seguinte representa o problema atrás enunciado.



Para resolver este problema temos de determinar para cada nodo, o seu valor esperado.



Assim, o Ricardo deverá escolher a opção B e, se o acontecimento G ocorrer, deverá escolher K.

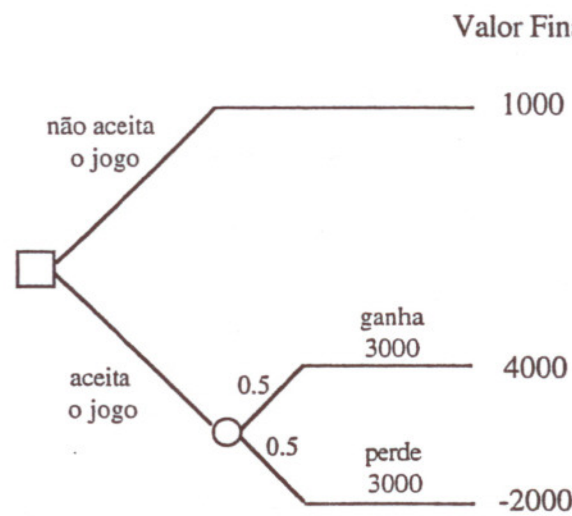
3.3 Preferência pelo risco

3.3.1 Noção de utilidade

Vejamos o seguinte exemplo:

Exemplo 5: Uma pessoa tem neste momento 1000 contos no banco e é-lhe oferecido o jogo de lançar uma moeda ao ar e ganhar ou perder 3000 contos.

Esta situação pode ser descrita pela seguinte árvore de decisão:



No ramo de baixo, representando a incerteza, temos um jogo ou lotaria. O valor esperado desta opção é obtido multiplicando as probabilidades dos futuros acontecimentos pelo respectivo valor final e somando todos estes produtos.

Esta medida foi primeiramente explorada por Daniel Bernoulli em 1738 quando descreveu o paradoxo de S. Petersburgo. Ele considerou a seguinte situação: é dado a uma pessoa, através de um preço pago por ela, a possibilidade de jogar um jogo que consiste em fazer vários lançamentos de uma moeda ao ar até aparecer *caras* pela primeira vez.

Se *caras* aparecer pela primeira vez no lançamento n, o prémio é de 2^n. O valor esperado do jogo é de

$$2\,(0.5) + 4\,(0.5)^2 + 8\,(0.5)^3 + \ldots$$

O valor desta série é infinito.

$$EV = \sum_{i=1}^{\infty} p_i\, v_i = \frac{1}{2}(2) + \frac{1}{4}(4) + \frac{1}{8}(8) + \ldots + \frac{1}{2^n}(2^n) = 1+1+1+\ldots+ = \sum_{i=1}^{\infty} 1 = \infty$$

Ora, como o valor esperado é uma medida da atractividade de uma situação incerta, qualquer um de nós deveria estar pronto a pagar uma soma qualquer, por mais alta que fosse só para jogar este jogo. O facto é que a maioria de nós não está disposto a pagar mais do que algumas dezenas ou centenas de escudos por este jogo. E aqui está o paradoxo. A solução reside no pressuposto de que o valor esperado é uma medida apropriada para uma opção incerta.

No Exemplo 5, o valor esperado de cada ramo da árvore é de 1000 contos; no entanto, nem todos nós aceitaríamos o jogo. Bernoulli argumentou que, para um indivíduo, o valor do dinheiro era uma função não linear. Usando como exemplo a função logarítmica, o valor esperado obtido era finito, mesmo sabendo que o valor esperado inicial, sem esta transformação, era infinito. Esta visão constitui a essência da noção de utilidade.

Se usássemos, por exemplo a função $\log_2 x$, teríamos,

$$EU = \sum_{i=1}^{\infty} p_i \, u(v_i) = \frac{1}{2}u(2) + \frac{1}{4}u(4) + \frac{1}{8}u(8) + \ldots + \frac{1}{2^n}u(2^n)$$

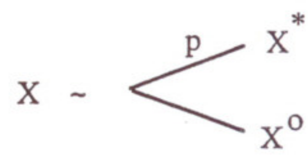
$$= \frac{1}{2}(1) + \frac{1}{4}(2) + \frac{1}{8}(3) + \ldots + \frac{1}{2^n}(n) = 2 \text{ utiles} = 4$$

Só em 1944, com o aparecimento do livro *The theory of games and economic behavior* escrito por von Neumann e Morgenstern, é que surge o moderno conceito de utilidade.

Definição 5: A utilidade de um resultado para um indivíduo é igual à probabilidade de ganhar um prémio *standard* num jogo, de tal modo que o indivíduo seja indiferente entre receber o resultado de certeza e aceitar o jogo.

Suponhamos que os valores de dinheiro em que estamos interessados se encontram no intervalo $[X^o, X^*]$representando X^o o mais pequeno valor possível e X^*o maior.

Consideremos agora um valor intermédio X e comparemos o jogo $\{X^o, X^*; p\}$ com a certeza de receber a quantia X. Qual o valor de p de tal modo que $X \sim \{X^o, X^*; p\}$?

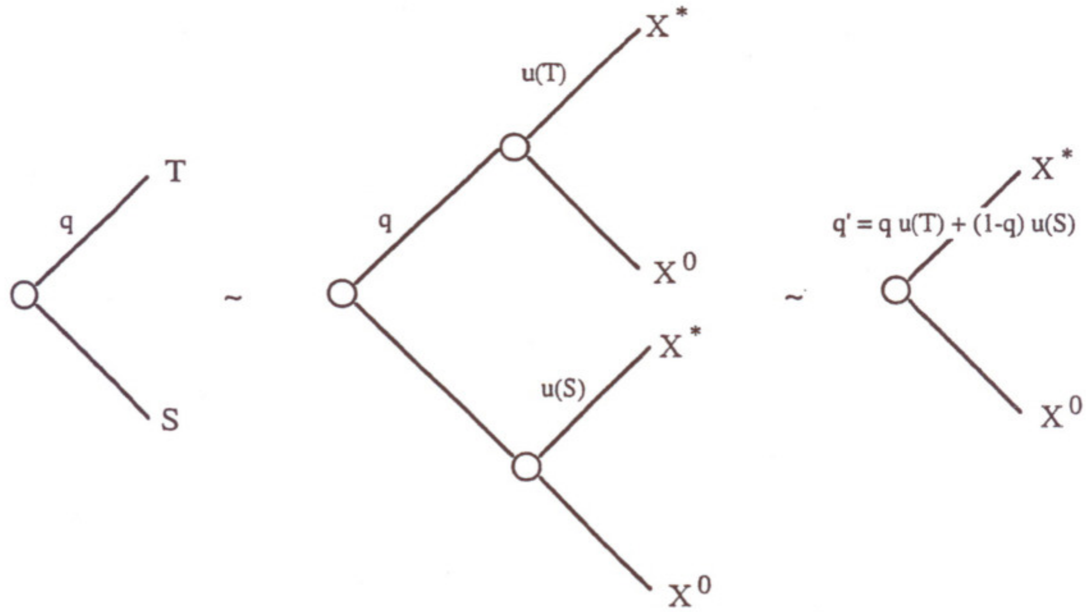


A utilidade de X é definida como sendo igual a esse valor p.

Usando esta terminologia, o princípio da substituição diz-nos que se tivermos dois valores S e T, qualquer um deles entre X^o e X^*, então

$$\{S\ , T\ ; q\} \sim \{\{X^o, X^*; u(S)\}\ ,\ \{X^o, X^*; u(T)\}\ ; q\}$$

Isto é, graficamente,



Como S e T não foram especificados, podemos dizer que o agente da decisão deve ser indiferente entre um jogo simples com prémios no intervalo [S, T] e um jogo simples com os prémios padrão X^o e X^* com uma probabilidade de se obter X^* calculada como atrás. Face a uma série de jogos, o agente de decisão escolherá o jogo que maximize a expressão

$$q\,u(T) \;+\; (1\text{-}q)\,u(S)$$

Isto é precisamente a noção de utilidade esperada de um jogo.

Concluímos então que o melhor caminho de acção é escolher a opção com maior utilidade esperada. Este tipo de frase faz parte de um mais amplo conjunto de critérios de racionalidade conhecido pelo nome de axiomas de utilidade de Savage (A1 a A5), que a seguir se enunciam.

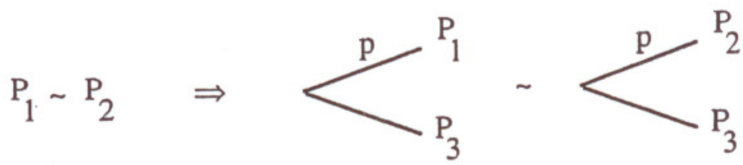
A 1 Dadas várias lotarias, o agente de decisão é capaz de as ordenar segundo a ordem de preferência. Isto é, dadas duas lotarias A e B, pode sempre dizer qual a que prefere ou se é indiferente entre ambos.

A 2 Dados três prémios P_1, P_2 e P_3, se $P_1 \succ P_2 \succ P_3$, então existe uma probabilidade $0 \leq p \leq 1$, tal que o agente de decisão seja indiferente entre obter P_2 de certeza e a lotaria que lhe dá P_1 com probabilidade p e P_3 com probabilidade (1-p).

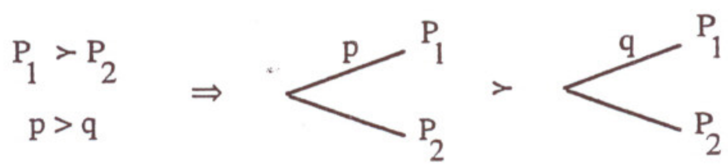
$$P_1 \succ P_2 \succ P_3 \quad \Rightarrow \quad P_2 \sim \begin{array}{l} \overset{p}{\nearrow}\; P_1 \\ \searrow\; P_3 \end{array}$$

A 3 Se o agente de decisão é indiferente entre dois prémios P_1 e P_2, ele é também indiferente entre duas lotarias, de tal modo que a primeira dá o prémio P_1 com probabilidade p e o prémio P_3 com probabilidade (1-p) e o segundo, o prémio P_2

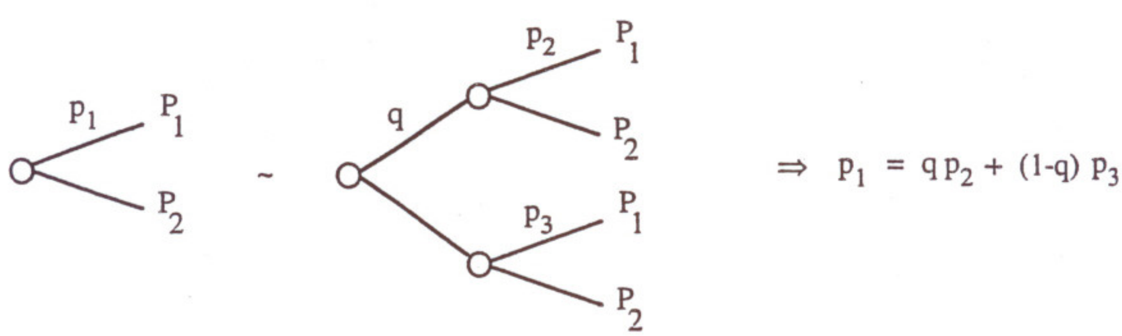
com probabilidade p e o prémio P_3 com probabilidade (1-p). Isto deve verificar-se quaisquer que sejam os valores de P_3 e p.



A4 Se tivermos duas lotarias, cada uma delas apenas com os prémios P_1 e P_2, e se o agente da decisão preferir P_1 a P_2, então deverá preferir a lotaria com maior probabilidade de ganhar P_1.



A5 Sejam dadas as lotarias A_i com um prémio P_1 com probabilidade p_i e o prémio P_2 com probabilidade ($1-p_i$), para i=1,2,3. Suponhamos também que a lotaria B dá entrada à lotaria A_2 com uma probabilidade q e entrada à lotaria A_3 com uma probabilidade (1-q). O agente de decisão é indiferente entre a lotaria A_1 e a lotaria B sse $p_1 = q\, p_2 + (1-q)\, p_3$.



Se uma pessoa poder aceitar estas propriedades como indicadores das suas preferências em relação a lotarias, então pode ser demonstrado que deve existir uma função de utilidade e que a acção racional será escolher a opção com maior utilidade esperada.

Em conclusão, vejamos algumas propriedades deste tipo de funções. Em primeiro lugar, $u(X^o) = 0$ e $u(X^*) = 1$. Em seguida, qualquer outra função existente pode ser escrita como uma transformação linear positiva de u, isto é, $u'(x) = a + b\,u(x)$, $b>0$. Esta última propriedade garante-nos que alterando a origem e a escala, quaisquer números, incluindo negativos, podem ser usados para representar a utilidade. Não estamos, por conseguinte, limitados ao intervalo [0,1].

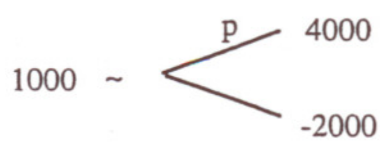
3.3.2 Funções unidimensionais de utilidade

Voltemos ao Exemplo 5.

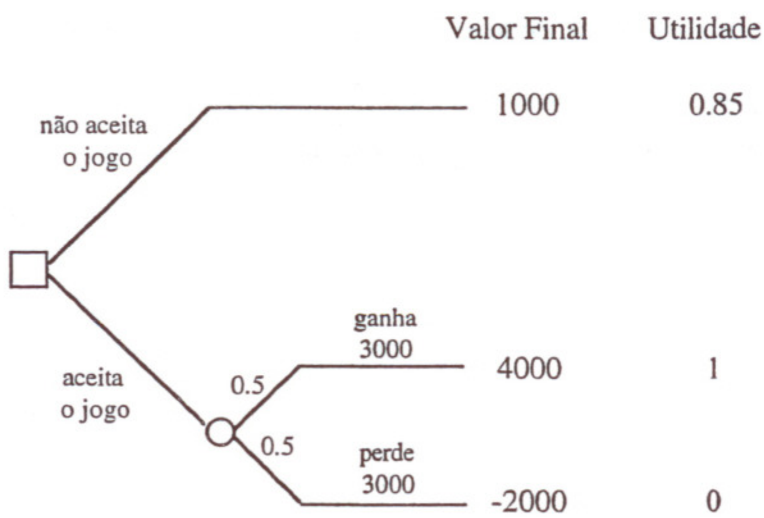
Para utilizarmos a teoria da utilidade neste exemplo, necessitamos de construir a função de utilidade do agente de decisão para valores de dinheiro. Os valores com que estamos a trabalhar são 4000, 1000 e -2000 contos. Então,

$$u(-2000) = 0 \qquad \text{e} \qquad u(4000) = 1$$

Para encontrarmos u(1000) temos de perguntar ao agente de decisão qual o valor que p deveria ter para que ele seja indiferente entre receber 1000c de certeza e aceitar a lotaria {-2000,4000;p}



Suponhamos que ele nos diz 0.85. Assim, u(1000)=0.85. Temos então a situação,



e a utilidade de aceitar o jogo será

$$u(\text{aceitar o jogo}) = 0.5 \times 0 + 0.5 \times 1 = 0.5$$

Comparando este valor com u(não aceitar o jogo) = 0.85, o agente de decisão, não deveria aceitar o jogo.

Exemplo 6: Suponhamos que ao agente de decisão é oferecida uma oportunidade de negócio em alternativa.

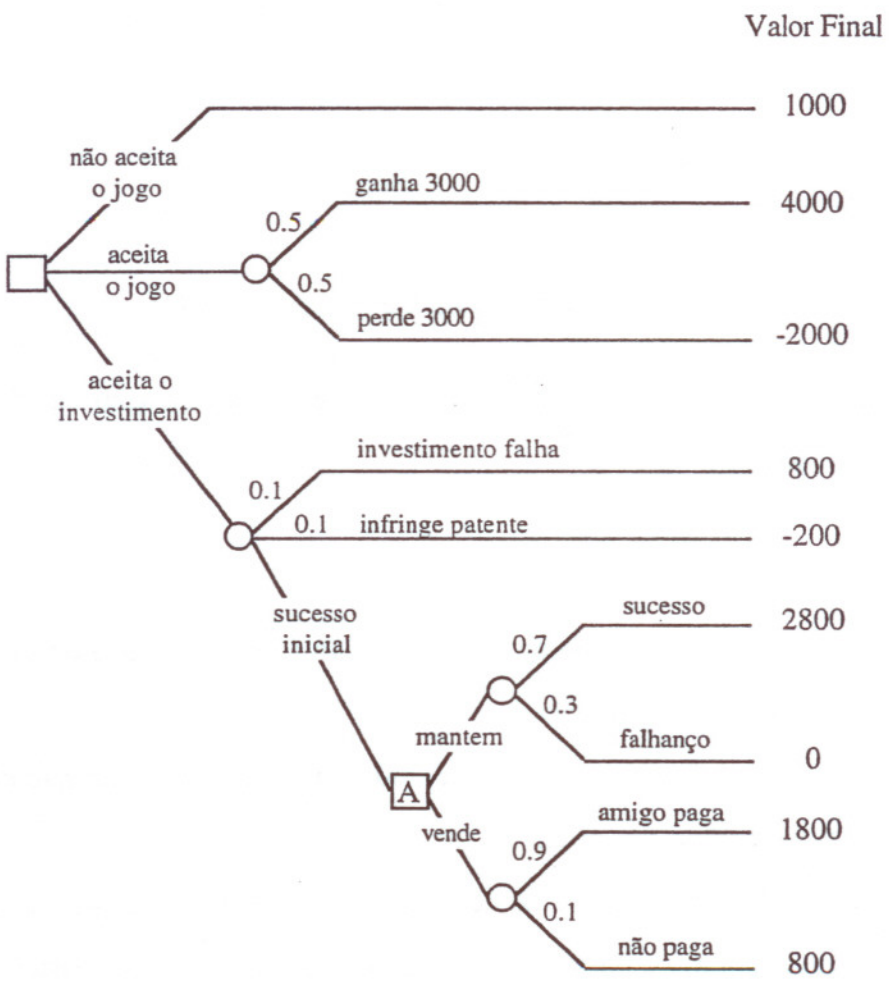
Fazendo um investimento de 200 contos (dos 1000 de que dispõe) ele pode aceitar esta opção.

Após um mês, terá 10% de hipóteses de que se saiba que o investimento não resultou e outros 10% de se infringir uma patente existente, tendo o agente de decisão de pagar, neste caso, uma multa de 1000 contos.

Se nenhuma destas eventualidades ocorrer, o agente de decisão ainda pode desistir, vendendo esta opção a um amigo que já lhe ofereceu 1000 contos por ela, mas em relação ao qual sabe-se que há 10% de hipótese de que não venha a pagar.

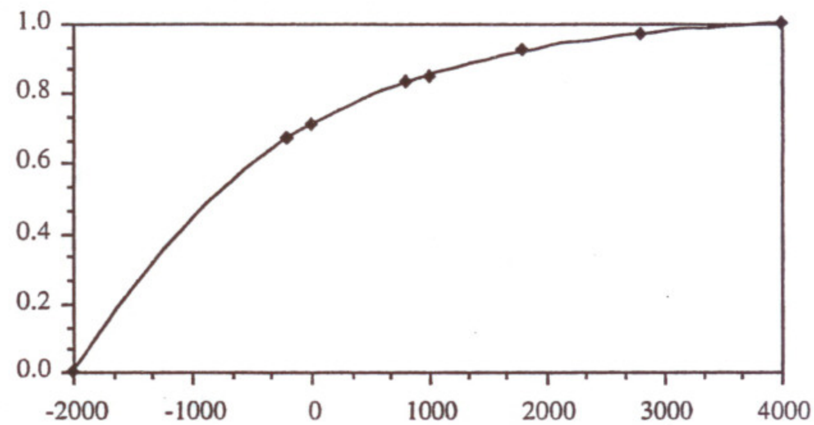
Em alternativa, pode esperar até o investimento começar a dar frutos; há uma hipótese de 70% de que possa ganhar 2000 contos, mas há também 30% de hipóteses de que perca mais 800 contos.

Começamos por construir a árvore de decisão para este problema.

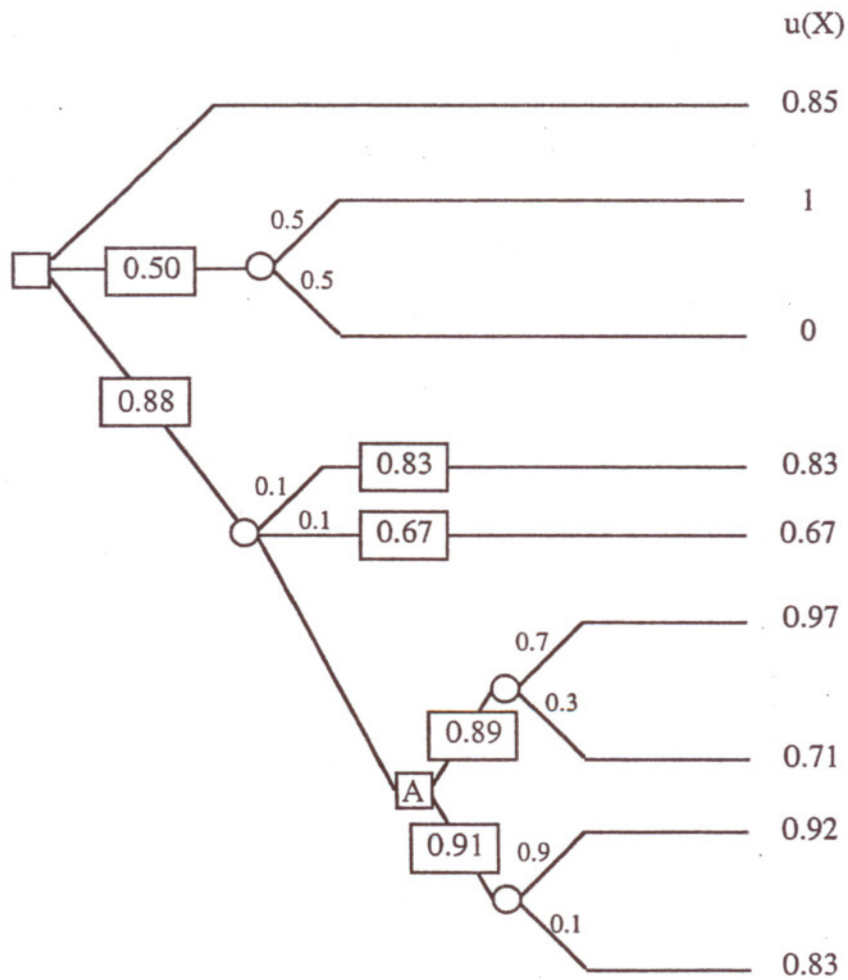


De seguida, determinamos a função de utilidade do agente de decisão. Usando o método anteriormente descrito, encontramos a seguinte curva de utilidade em relação ao dinheiro:

X	u(X)
-2000	0.00
-200	0.67
0	0.71
800	0.83
1000	0.85
1800	0.92
2800	0.97
4000	1.00



Calculando as utilidades esperadas, temos



A primeira conclusão a tirar é que se o agente de decisão estiver na situação da opção $\boxed{A}$ (aceitando ele o princípio da maximização da utilidade esperada e estando correcta a sua curva de utilidade) ele deverá vender.

Ora, os valores esperados da venda e da opção de manter são respectivamente 1700 e 1960 contos. Portanto, usando o critério do valor esperado, ele não deveria vender. Esta diferença entre decisões é produzida pela concavidade da curva de utilidade.

Em conclusão, se o agente de decisão quiser basear a sua decisão teoricamente, deveria aceitar o jogo mais complexo e se após um mês ele tiver boas notícia, deverá vender ao seu amigo, mesmo sabendo que ele poderá não pagar.

Em nota final, devemos salientar que não é correcto interpretar as diferenças entre utilidades esperadas como medidas de intensidade de preferência. A diferença entre as opções 'aceitar o investimento' e 'não aceitar o investimento' expressa numericamente por 0.88-0.85=0.03, não tem qualquer significado.

3.3.3 Noção de risco

O primeiro conceito que aparece como resultado da noção de utilidade é o de equivalente certo.

Definição 6: Equivalente certo (EC) é definido como o valor em relação ao qual o agente da decisão considera que seria indiferente entre receber de certeza esse valor ou aceitar o jogo. Isto é, a utilidade do equivalente certo tem de ser igual à utilidade do jogo.

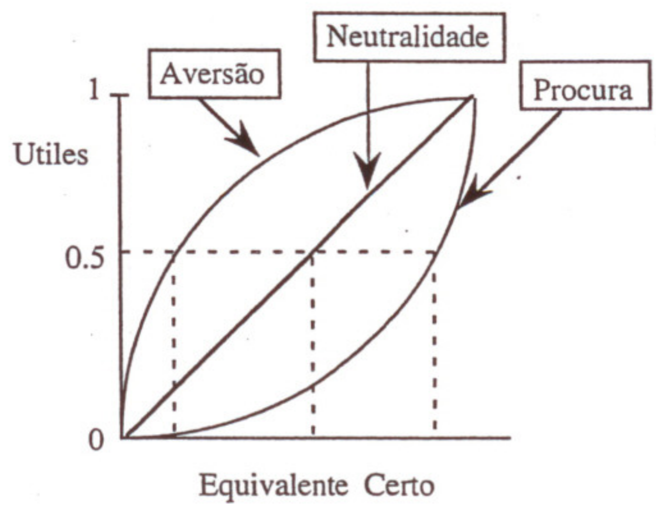
No Exemplo 5, vimos que o valor esperado do jogo era de 1000 contos e que a sua utilidade era de 0.50. Usando a função de utilidade do agente de decisão, este valor de utilidade corresponde a um valor de -854 contos, francamente inferior ao valor esperado.

Definição 7: À diferença entre o valor esperado e o equivalente certo é dado o nome de prémio do risco (PR). No nosso caso o prémio do risco era de 1000 - (- 854) = 1854 contos. Corresponde ao valor que o agente de decisão estaria disposto a aceitar para que a incerteza fosse reduzida.

Com base no valor do prémio do risco, podemos definir as seguintes atitudes perante o risco:

1. Aversão ao risco sse $PR > 0$
2. Neutralidade perante o risco sse $PR = 0$
3. Procura do risco sse $PR < 0$

A figura abaixo mostra as formas típicas das funções de utilidade associadas a estas atitudes perante o risco.



Para uma lotaria equiprovável entre o melhor e o pior dos resultados possíveis, o equivalente certo de uma pessoa com neutralidade perante o risco é igual ao valor esperado. O de uma pessoa adversa ao risco é menor e o de uma pessoa que procura o risco é maior.

A função de utilidade de pessoa neutral ao risco é uma linha recta. O equivalente certo dessa pessoa iguala o valor esperado. O prémio do risco é sempre zero. A inclinação da função é constante e a segunda derivada é zero.

A função de utilidade de pessoa adversa ao risco está acima da linha de neutralidade. A inclinação da função é sempre positiva mas decrescente, de tal modo que a segunda derivada é negativa. O prémio do risco é positivo.

A função de utilidade de pessoa que procura o risco está abaixo da linha de neutralidade. O prémio do risco é negativo e a curvatura é tal que a inclinação é sempre positiva com uma segunda derivada não negativa.

A tabela a seguir resume as características das curvas de utilidade relativas às várias atitudes perante o risco.

	Função de utilidade				
Atitude perante o risco	Linha	EC	PR	Inclinação	f''
Aversão	côncava	< VE	+	+	-
Neutralidade	recta	= VE	0	constante	0
Procura	convexa	> VE	-	+	+

A aversão ao risco é a tendência mais comum. É de esperar que o agente da decisão seja cauteloso em relação a situações em que estão em jogo valores significativos para o seu bem-estar. Decisões triviais de rotina não são normalmente objecto de análise da decisão.

Agentes de decisão neutrais em relação ao risco normalmente não discutem as suas análises em termos de utilidade esperada. Se um agente da decisão é neutral, então o critério do valor esperado é suficiente. Normalmente isto acontece quando os valores em jogo estão dentro das condições normais. A neutralidade perante o risco é aceite para a maioria das análises de política pública, embora decisões governamentais de grande importância, tais como energia nuclear, defesa e desvalorização, normalmente se pautem por uma aversão ao risco.

4

A tomada de decisão

4.1 Críticas à teoria da utilidade

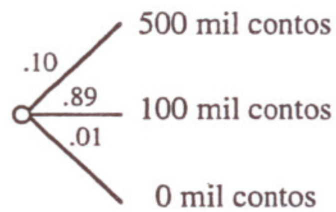
A teoria de utilidade de von Neumann e Morgenstern tem sido usada em vários domínios. No entanto, não é universalmente aceite. Algumas críticas têm aparecido em relação ao uso da utilidade esperada como guia para a tomada da decisão em face de incerteza.

Uma das primeiras críticas é devida ao economista francês Maurice Allais (1953) e é conhecida pelo nome de paradoxo de Allais. Vejamos os seguintes dois exemplos de situações:

Exemplo 7: Suponhamos que lhe é dado a escolher entre a opção certa A e a lotaria B

A | B

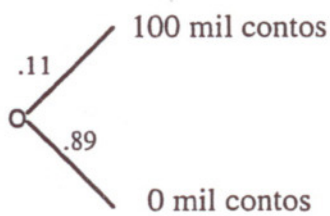
100 mil contos



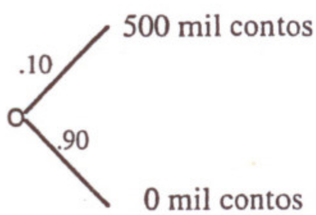
Qual é que prefere?

Exemplo 8: Consideremos agora a escolhe entre a opção certa C e a lotaria D

C



D



Qual é que prefere?

As pessoas que escolherem A e D estão a violar os axiomas da utilidade. E isto porque as situações dos Exemplos 7 e 8 estão relacionadas. Apenas retiramos 89% de hipóteses de ganhar 100 mil contos e colocamos esta percentagem na hipótese de ganhar nada. Apenas subtraímos uma constante do jogo A-B para o jogo C-D.

De facto, usando a teoria da utilidade esperada, podemos ver que as escolhas de A e D são inconsistentes. Para provar isto, vamos definir uma função de utilidade com u(500)=1, u(0)=0 e u(100)=u.

Se A é mais atraente do que B, em termos de utilidade esperada podemos dizer que

$$u > 0.1 \times 1 + 0.89 \times u + 0.01 \times 0$$

$$u > \frac{10}{11}$$

Por outro lado, se D é preferida a C,

$$0.1 \times 1 + 0.9 \times 0 > 0.11 \times u + 0.89 \times 0$$

$$u < \frac{10}{11}$$

Como consequência imediata desta situação podemos afirmar que não existe nenhum imperativo moral que nos force a adoptar a teoria da decisão. Os agentes da decisão são livres de tomarem as suas decisões da maneira que quiserem. A teoria existe para guiar aqueles que queiram seguir os princípios e fornece-lhes um enquadramento sensível para pensarem através de situações de decisão complexas que envolvam incerteza. A racionalidade é definida em termos de aderência a um conjunto de regras; não há razão que obrigue o agente de decisão a reger-se pelas regras da teoria da decisão, ou por quaisquer outras.

Uma outra crítica algumas vezes apontada à teoria da decisão é o facto da teoria necessitar de funções de utilidade obtidas por vezes em situações hipotéticas, em jogos que pode talvez nunca encontrar na realidade. Aqui, mais uma vez há a salientar que o agente da decisão não é obrigado a seguir os procedimentos da análise da decisão. Estes procedimentos não são mais do que uma série de ideias usadas para estruturar problemas complexos e incertos. Usamos a teoria da utilidade não porque consideramos que esteja correcta, mas sim porque representa as nossas preferências em relação ao risco na altura da tomada da decisão e na forma que quisermos.

4.2 Outras abordagens normativas

Acabamos de ver uma abordagem que encara os problemas de decisão baseados em postulados comportamentais. No entanto, na literatura, e em especial nos últimos 30 anos, têm aparecido outros enquadramentos para atacar o problema de objectivos em conflito. Vejamos muito rapidamente cinco destas alternativas tendo em conta que algumas diferenças entre elas são mais resultantes de rivalidades entre cientistas do que verdadeiras diferenças. Para cada uma destas abordagens, apresentamos algumas referências bibliográficas que poderão auxiliar o leitor como primeira iniciação.

A primeira destas técnicas é a análise de custo-benefício (CBA). Baseia-se na comparação dos efeitos positivos e negativos dos vários cursos de acção possíveis (Layard, 1972; Sassone & Schaffer, 1978; Sugden & Williams, 1978). É especialmente desenhada para avaliações económicas de projectos de índole social. Não é um procedimento geral de apoio à decisão.

No entanto, importa salientar que, quando se leva a cabo uma análise de custo-benefício, implicitamente estamos a construir uma função multiatributo de valor. Começa-se por identificar os factores, medir os resultados para cada factor, atribuir um preço a cada factor e adicionar todos os custos resultantes. Constrói-se então uma função multiatributo de valor onde os preços podem ser interpretados como pesos e o custo final apenas como uma média ponderada.

Uma outra alternativa, oriunda de um grupo de investigadores norte-americanos resultou no chamado movimento de tomada de decisão multicritério (MCDM). De certo modo seguindo as ideias de Zeleny (1982), baseia-se no estudo da programação linear e no uso do algoritmo simplex com a correspondente optimização de uma função linear com restrições lineares nas variáveis.

A terceira alternativa é a teoria de opinião social (SJT) baseada nos trabalhos de Hammond da Universidade do Colorado (Hammond et al., 1975). Uma vez definidos os atributos e as opções colocadas em sítio visível, pede-se ao agente de decisão que faça um juízo holístico da atractividade de um conjunto representativo de opções. É então construído uma função multiatributo de valor, normalmente aditiva e linear, sendo estes dados aproximados pelo métodos dos mínimos quadrados. Como se trata de uma regressão, o número de opções necessárias cresce com o número de atributos. Na prática, este método utiliza uma função multiatributo de valor aditiva e linear, onde os pesos são determinados pela aplicação da regressão linear multivariada a juízos holísticos.

Especialmente em França e na Bélgica tem sido usado um outro método desenvolvido pela Universidade de Paris (Roy, 1973, 1977) e com o nome de ordenação (*surclassement* ou *outranking*). Este método produz, sempre que apropriado, uma ordenação das várias opções. Sendo conhecido o conjunto das opções e estando cada opção bem definida em termos dos vários atributos, as opções são ordenadas à custa de duas medidas: a medida de concordância e a medida de discordância.

Finalmente podemos considerar o processo hierárquico analítico (AHP) centrado à volta da ideia de hierarquia de factores e do trabalho de Saaty da Universidade de Pittsburgh, EUA (Saaty, 1980). Embora se possa encarar este processo como produzindo uma análise multiatributo de valor, os pesos dos atributos são obtidos de uma forma verbal: *Considere um par de atributos. Têm a mesma importância ou um é mais importante do que outro? Se um deles é mais importante, qual deles é e de que maneira? É pouco mais importante, fortemente mais importante, muito mais importante ou muitíssimo mais importante?*

Em conclusão e simplificando muitíssimo, a análise de custos-benefícios foi desenhada para avaliação económica de opções de política pública e é talvez a melhor opção neste contexto. A maioria dos métodos multicritério são aplicados em situações onde as variáveis de decisão são contínuas, não discretas. A técnica de ordenação pode ser aplicada com qualquer outra que crie um modelo aditivo linear. Todos os outros métodos podem ser vistos como técnicas para gerar pesos numa função linear aditiva de valor.

4.3 Aspectos psicológicos da tomada de decisão

Os enviesamentos mais vulgares na tomada da decisão são resultantes do seguinte:

1 Enquadramento da decisão

2 Disponibilidade

3 Representatividade

4 Ancoragem e ajuste

Começamos por ver alguns exemplos de enviesamento resultante do enquadramento da decisão. Suponhamos as situações descritas nos exemplos 9 e 10.

Exemplo 9: Imagine que decidiu ver um filme e o bilhete custa 500$00. Quando vai a chegar à bilheteira do cinema descobriu que perdeu uma nota de 500$00. Mantém a decisão de pagar 500$00 para ver o filme (partindo da hipótese de que tem dinheiro suficiente)?

SIM **NÃO**

Exemplo 10: Imagine que decidiu ver um filme e pagou o bilhete que custou 500$00. Quando vai a entrar no cinema reparou que perdeu o bilhete. Partindo da hipótese de que o bilhete não pode ser recuperado e que tem dinheiro suficiente, decidirá comprar um novo bilhete?

SIM **NÃO**

Normalmente as pessoas têm tendência a responder SIM ao primeiro e NÃO ao segundo. No entanto, os resultados em ambas as situações é o mesmo: perde 500$00 e não vê o filme; paga 1000$00 e vê o filme. Só o enquadramento é diferente

Vejamos agora as situações descritas nos Exemplos 11 e 12.

Exemplo 11: Estima-se que 600 pessoas morram numa determinada zona do mundo devido a um doença. Foram propostos dois programas alternativos para combater a doença

Programa A: 200 pessoas serão salvas;

Programa B: 1/3 de probabilidade que 600 pessoas se salvem e 2/3 de probabilidade de que nenhum se salve.

Qual dos programas escolheria? A B

Exemplo 12: Entretanto outros dois programas foram apresentados

Programa C: 400 pessoas morrerão

Programa D: 1/3 de probabilidade de que nenhuma pessoa morra e 2/3 de probabilidades de que as 600 pessoas morram.

Qual dos programas escolheria? C D

Postas perante as duas situações anteriores, a apesar de serem idênticas sob o ponto de vista prático, as pessoas tendem a responder A ao Exemplo 11 e D ao Exemplo 12.

O segundo caso de enviesamento é resultante da denominada disponibilidade. Consiste na tendência para estimar a probabilidade de um acontecimento baseado na possibilidade de recordar instâncias desse acontecimento.

Exemplo 13: Em cada um dos pares seguintes, qual dos elementos causa mais mortes em cada ano?

A1.	Derrame cerebral	ou	A2.	Todos os acidentes
B1.	Cancro do pulmão	ou	B2.	Acidentes em veículos motorizados
C1.	Enfisema	ou	C2.	Homicídio
D1.	Fogo e chamas	ou	D2.	Tuberculose

Quando postos perante esta situação, as pessoas têm normalmente a tendência a escolher A2, B2, C2 e D1. No entanto, a tabela seguinte, apresentando os valores reais, embora datados de 1981 e para os EUA, contradiz estas respostas mais vulgares.

Causas de Morte (1981)	*Total Anual US (em milhares)*	*Estimações (em milhares)*	*Notícias (em milhares)*
Derrame cerebral	209	7	8
Todos os acidentes	112	89	276
Cancro do pulmão	76	10	3
Acidentes veículos	55	41	136
Enfisema	22	3	1
Homicídio	19	6	264
Fogo e chamas	4	3	24
Tuberculose	4	1	0

Normalmente, as pessoas consideram mais importante e mais grave as situações mais noticiadas.

Outro enviesamento é o resultante da representatividade, tendência para estimar a probabilidade de que uma coisa pertença a uma classe independentemente da baixa representatividade da classe. Ignoramos a número relativo de cada classe.

Exemplo 14: Ao lançar uma moeda ao ar, qual das situações considera mais provável?

A: CKCKKC

B: CCCKKK

C: CCCCKC (C=cara; K=coroa)

A é normalmente considerada mais provável do que B que não parece aleatória e mais provável do que C que não parece ter vindo de uma moeda equilibrada. No entanto, se a moeda é de facto equilibrada, qualquer das situações tem a mesma probabilidade.

Vejamos mais exemplos.

Exemplo 15: Uma determinada cidade é servida por dois hospitais.

No hospital maior, nascem cerca de 45 crianças por dia, e no hospital mais pequeno, cerca de 15 por dia.

Sabemos que cerca de 50% das crianças nascidas são rapazes. No entanto a percentagem exacta varia de dia para dia. Uns dias pode ser maior do que 50%, outros dias menor.

Por um período de um ano, cada hospital registou os dias nos quais mais de 60% das crianças eram rapazes.

Qual dos hospitais pensa que registou mais destes dias?

A: O hospital maior

B: O hospital mais pequeno

C: Mais ou menos o mesmo com diferença menor do que 5%.

Normalmente, mais de metade dos inquiridos, respondem C. No entanto, pela teoria da amostragem, o número esperado de dias nos quais mais de 60% das crianças nascidas é rapaz é muito maior no hospital mais pequeno. No hospital maior é muito mais difícil sair-se dos 50%.

Exemplo 16: A Fernanda tem 31 anos, é solteira e é inteligente. Licenciou-se em Filosofia e enquanto estudante, sempre se preocupou com a discriminação entre seres humanos, assim como com outros problemas sociais e participou em várias manifestações anti-nucleares. Qual das afirmações considera mais provável?

A: A Fernanda é empregada bancária

B: A Fernanda é empregada bancária e é sindicalista.

Como se sabe, o conjunto formado pela opção B é muito mais pequeno (é um sub-conjunto) do formado pela opção A. Logo, se B < A, então, pela teoria das probabilidades, P(B) < P(A). Há, no entanto, uma tendência generalizada em se responder B. Isto é devido à descrição inicial.

Por fim, a ancoragem e ajuste constitui um enviesamento também muito comum. Em muitas situações as pessoas fazem estimativas partindo de um valor inicial que é ajustado até à resposta final.

Exemplo 17: Gastando não mais de 5 segundos com cada um deles, dê a sua melhor estimativa para os seguintes produtos:

A: $8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$

B: $1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 \times 8$

Normalmente as pessoas dão um valor mais alto a A do que a B.

Referências bibliográficas

Allais, M. (1953). Le comportement de l'homme rationnel devant le risque: Critique des postulats et axiomes de l'école américaine. *Econometrica, 21*, 503-546.

Bernoulli, D. (1738). Specimen theoriae novae de mesura sortis. *Commentarii academiae scientiarum imperialis Petropolitanae*, 175-192; traduzido em Sommer, L., 1984, *Econometrica 22*, 23-26.

Blalock, H. M. (1968). The measurement problem. In H. M. Blalock & A. Blalock (Eds.), *Methodology in social research (pp. 5-27). New York: McGraw-Hill.*

Edwards, W. (1971). Social utilities. *Engineering Economist*, Summer Symposium Series,6.

Fishburn, P. C. (1970). *Utility theory for decision making*. New York: John Wiley & Sons.

Fishburn, P. C. (1989). Foundations of decision analysis: Along the way. *Management Science, 35* (4), 387-405.

French, S. (1988). *Decision theory: An introduction to the mathematics of rationality.* Chichester: Ellis Horwood Ltd.

Gardiner, P. C. & Edwards, W. (1975). Public values: Multiattribute utility measurement for social decision making. In Kaplan, M. F. & Schwartz, S., eds., *Human judgment and decision Process,* New York: Academic Press.

Hammond, K. R., Stewart, T. R., Brehmer. B., & Steinman, D. O. (1975). Social judgment theory. In Kaplan, M. F. & Schwartz, S., eds, *Human Judgment and Decision Processes*. New York: Academic Press, 272-307.

Keeney, R.L., & Raiffa, H. (1976). *Decisions with multiple objectives: Preferences and value tradeoffs*. New York: John Wiley & Sons.

Krantz, D. H., Luce, R. D., Suppes, P., & Tversky. (1971). *Foundations of measurement.* San Diego: Academic Press.

Kyburg, H. E. (1984). *Theory and measurement.* Cambridge, England: Cambridge University Press.

Layard, R. (ed.) (1972). *Cost-benefit analysis.* Harmondsworth: Penguin.

Linstone, H. A. (1984). *Multiple perspectives for decision making.* New York: North Holland.

Luce, R. D. & Tukey, J. W. (1964). Simultaneous conjoint measurement: A new type of fundamental measurement. *Journal of Mathematical Psychology, 1*, 1-27.

Pfanzagl, J. (1968). *Theory of measurement.* New York: Wiley.

Roy, B. (1973). How outranking relation helps multiple criteria decision-making. In *Selected Proceedings of a Seminar on Multi-criteria Decision-making.* Chapel Hill, SC: University of South Carolina Press.

Roy, B. (1977). Partial preference analysis and decision-aid. In Bell, D. E., Keeney, R. L., & Raiffa, H., eds., *Conflicting objectives in decisions.* New York: Wiley.

Saaty, T. L. (1980). *The analytic hierarchy process.* New York: McGraw-Hill.

Sassone, P. G. & Schaffer, W. A. (1978). *Cost-benefit analysis: A handbook.* New York: Academic Press.

Sugden, R. & Williams, A. (1978). *Practical cost-benefit analysis.* Oxford University Press.

Watson, S. R., & Buede, D. M. (1989). *Decision synthesis: The principles and practice of decision analysis.* Cambridge: Cambridge University Press.

von Winterfeldt, D., & Edwards, W. (1986). *Decision analysis and behavioral research.* Cambridge: Cambridge University Press.

Zeleny, M. (1982). *Multiple criteria decision making.* New York: McGraw-Hill.